

A linguagem $a^n b^n a^n$

Como no caso do lema do bombeamento para linguagens regulares, o Teorema 1 é utilizado tipicamente para mostrar que certas linguagens não são LC.

A ideia é simples:

Se alguma palavra muito grande da linguagem L não pode ser bombeada como indicado no Teorema 1, então a linguagem L não é LC.

Vejamos um exemplo concreto.

Exemplo 1: Considere a linguagem $a^n b^n a^n$, com $n \geq 0$

Intuitivamente, essa linguagem não é LC pois não há como verificar que os 3 blocos da palavra possuem o mesmo tamanho utilizando apenas uma pilha como memória.

Para demonstrar esse fato, nós assumimos que m é um número arbitrariamente grande, e consideramos a palavra

$$w = a^m b^m a^m$$

A seguir, é preciso considerar todas as formas como a palavra w pode ser decomposta em 5 segmentos

$$w = x y z u v$$

Após pensar um pouco, nós descobrimos que os dois casos abaixo cobrem todas as possibilidades:

caso 1: y (ou u) possui mais de um tipo de símbolo (e.g., $y = a..ab..b$)

Nesse caso, é fácil ver que ao bombear os segmentos y e u nós obtemos uma palavra que não tem mais o padrão $a...ab...ba...a$.

Logo, a palavra $w_2 = xy^2zu^2v$ não está em $a^n b^n a^n$, e o bombeamento falha nesse caso.

caso 2: y e u são blocos de símbolos do mesmo tipo

Nesse caso, y e u devem ser parte dos blocos que constituem a palavra w . Por exemplo,

$$w: \begin{array}{|c|c|c|} \hline a \dots a & b \dots b & a \dots a \\ \hline \end{array}$$

$y \qquad \qquad u$

Logo, ao remover (ou bombear) os fragmentos y, u nós obtemos uma palavra que não possui blocos do mesmo tamanho e, portanto, não pertence à linguagem $a^n b^n a^n$. Ou seja, o bombeamento também falha nesse caso.

Finalmente, como o bombeamento falha em todos os casos, nós podemos concluir que a linguagem $a^n b^n a^n$ não é LC.

◇