

A linguagem dos quadrados

Considere a linguagem

QUAD: blocos de a’s cujo tamanho é um quadrado perfeito

A seguir, nós vamos mostrar que QUAD não é regular.

Imagine que o autômato M reconhece a linguagem QUAD.

E imagine que M tem k estados.

Daí, a gente considera o quadrado perfeito k^2 .

E aplica o nosso truque



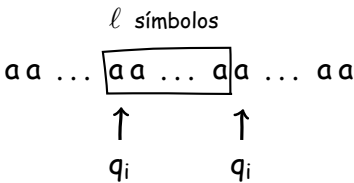
Aqui, a gente já sabe que

- i.

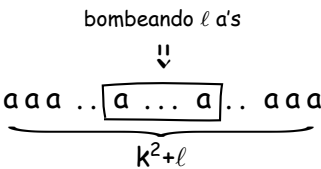
o autômato vai responder SIM — *(porque?)*
- ii.

o autômato vai passar duas vezes pelo mesmo estado, durante a leitura do bloco de a’s — *(porque?)*

Colocando o loop em foco, a gente vê o seguinte



Isso significa que o autômato também vai aceitar a palavra



E agora nós observamos que

$\rightarrow k^2 + \ell$

não é um quadrado perfeito

Porque não?

Bom, a primeira observação é que $\ell \leq k$.

Porque a gente sempre pode considerar um loop onde todos os estados são diferentes — *(e o autômato tem apenas k estados)*

Daí, a gente olha para o próximo quadrado perfeito

$$(k + 1)^2 = k^2 + \underbrace{(2k + 1)}_{> \ell}$$

Logo, nós temos

$$k^2 < k^2 + \ell < (k + 1)^2$$

Logo, $k^2 + \ell$ não é um quadrado perfeito.

Mas, o autômato M aceita a palavra $a^{k^2+\ell}$.

Isso é uma contradição.

Logo, a linguagem QUAD não é regular.