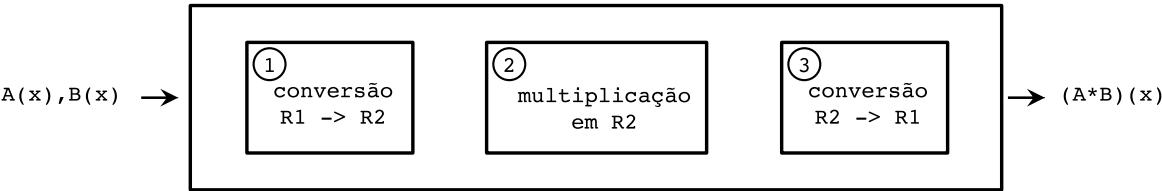


Uma estratégia esperta de decomposição esperta

A figura abaixo ilustra o método para multiplicação de polinômios a que chegamos no final da seção anterior.



Nós já sabemos que a etapa 2 executa em tempo  $\Theta(n)$ .

O desafio agora é encontrar uma maneira eficiente de implementar as etapas 1 e 3.

E a solução consiste em escolher as coordenadas de maneira esperta — para reaproveitar trabalho.

Nós começamos com uma observação simples.

Suponha que nós queremos calcular o valor do polinômio  $A(x)$  nos pontos 1 e -1.

Observando que  $1^2 = (-1)^2$ , faz sentido separar os termos com potências pares e ímpares de  $A(x)$ :

$$A(x) = \underbrace{a_0 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}_{A_2(x)} + \underbrace{a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}_{A_1(x)}$$

de modo que

$$\begin{aligned} A(1) &= A_2(1) + A_1(1) \\ A(-1) &= A_2(1) + A_1(-1) \end{aligned}$$

Ou seja, nós não precisamos calcular  $A_2(-1)$ .

De fato, nós podemos ser um pouquinho mais espertos, escrevendo  $A(x)$  como

$$A(x) = \underbrace{a_0 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}_{A_2(x)} + \left[ \underbrace{a_1 + a_3x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-2}}_{A_1(x)} \right] \cdot x$$

Agora, tanto  $A_2(x)$  como  $A_1(x)$  só possuem potências pares, de modo que  $A_2(-1) = A_2(1)$  e  $A_1(-1) = A_1(1)$ .

Logo,

$$\begin{aligned} A(1) &= A_2(1) + A_1(1) \\ A(-1) &= A_2(1) + A_1(1) \cdot (-1) \end{aligned}$$

e apenas  $A_2(1)$  e  $A_1(1)$  precisam ser calculados.

Essa ideia é muito legal!

Mas, como é que nós podemos fazê-la funcionar para uma coleção maior de pontos?

A resposta é: trabalhando com números complexos.

Suponha que nós queremos calcular o valor do polinômio  $A(x)$  nos pontos  $1, -1, i, -i$ .

Observando que  $(-1)^2 = 1^2$  e  $(-i)^2 = i^2$ , nós escrevemos o polinômio  $A(x)$  como

$$A(x) = \underbrace{a_0 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}_{A_2(x)} + \left[ \underbrace{a_1 + a_3x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-2}}_{A_1(x)} \right] \cdot x$$

de modo que só é preciso calcular  $A_2(1), A_1(1), A_2(i), A_1(i)$ .

A seguir, nós observamos que  $1^4 = i^4$ .

Logo, faz sentido separar também as potências múltiplas de 4 das demais potências de  $A_2(x)$  (e  $A_1(x)$  também):

$$A_2(x) = \underbrace{a_0 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n}_{A_{22}(x)} + \underbrace{a_2x^2 + a_6x^6 + \dots + a_{n-2}x^{n-2}}_{A_{21}(x)}$$

de modo que

$$\begin{aligned} A_2(1) &= A_{22}(1) + A_{21}(1) \\ A_2(i) &= A_{22}(1) + A_{21}(i) \end{aligned}$$

Ou seja, nós não precisamos calcular  $A_{22}(i)$ .

E, como antes, nós podemos ser um pouquinho mais espertos escrevendo

$$A_2(x) = \underbrace{a_0 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n}_{A_{22}(x)} + \left[ \underbrace{a_2 + a_6x^4 + \dots + a_{n-2}x^{n-4}}_{A_{21}(x)} \right] \cdot x^2$$

Agora, tanto  $A_{22}(x)$  como  $A_{21}(x)$  só possuem potências múltiplas de 4, de modo que

$$A_{22}(1) = A_{22}(i) \qquad A_{21}(1) = A_{21}(i)$$

Logo, nós podemos calcular

$$\begin{aligned} A_2(1) &= A_{22}(1) + A_{21}(1) \\ A_2(i) &= A_{22}(1) + A_{21}(1) \cdot i^2 \end{aligned}$$

A mesma coisa, é claro, também pode ser feita com  $A_1(x)$ .

Não é difícil ver que nós fizems a mesma coisa duas vezes.

E ver isso é a chave para generalizar a coisa ...