

Multiplicação de polinômios

As observações acima implicam que qualquer polinômio de grau n

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad [\text{R1}]$$

pode ser representado de maneira única como uma coleção de $n + 1$ pontos

$$A(x) : \left\{ (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \right\} \quad [\text{R2}]$$

Isso é relevante porque algumas operações entre polinômios podem ser implementadas de maneira mais eficiente utilizando a representação R2 do que utilizando a representação R1.

Por exemplo, considere o problema de multiplicar dois polinômios

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Utilizando o procedimento padrão que aprendemos na escola, a solução do problema leva tempo $\Theta(n^2)$.

E, utilizando as ideias da aula passada, o problema é resolvido em tempo $\Theta(n^{\log_2 3})$.

Agora, veja o que acontece quando temos os dois polinômios representados no formato R2:

$$A(x) : \left\{ (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \right\}$$

$$B(x) : \left\{ (x_0, z_0), (x_1, z_1), (x_2, z_2), \dots, (x_n, z_n) \right\}$$

No ponto x_0 , o polinômio $A(x)$ assume o valor y_0 , e o polinômio $B(x)$ assume o valor z_0 .

Mas, isso significa que, no ponto x_0 o polinômio $(A \cdot B)(x)$ deve assumir o valor $y_0 \cdot z_0$.

Levando em conta todos os pontos, nós temos que o polinômio $(A \cdot B)(x)$ é representado por

$$(A \cdot B)(x) : \left\{ (x_0, y_0z_0), (x_1, y_1z_1), (x_2, y_2z_2), \dots, (x_n, y_nz_n) \right\}$$

e o nosso problema está resolvido!

Quase ...

Note que $(A \cdot B)(x)$ é um polinômio de grau $2n$, e isso significa que a sua representação R2 precisa conter $2n + 1$ pontos.

Mas, isso é um problema fácil de resolver: basta começar com representações para $A(x)$ e $B(x)$ contendo $2n + 1$ pontos.

A boa notícia é que a multiplicação baseada na representação R2 leva tempo $\Theta(n)$.

A má notícia é que os nossos polinômios em geral não estão nesse formato ...